
Mécanique analytique, Corrigé 5

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Problème de la surface minimale de révolution

Nous avons la liberté de paramétriser la courbe en fonction de x ou de y . Nous allons tout d'abord faire le choix $(x, y(x))$ afin d'obtenir une variable cyclique puis montrer que l'autre paramétrisation conduit à une autre quantité conservée : la fonction hamiltonienne.

L'aire d'une bande de la surface vaut $2\pi x ds$ où le petit élément de longueur vaut $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. En choisissant $y = y(x)$, on peut écrire $dy = y'(x) dx$, ainsi l'aire d'une bande de la surface devient $2\pi x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. La surface totale mesure

$$A = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} dx x \sqrt{1 + y'^2} = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} dx F(x, y, y'), \quad (1)$$

où $F(x, y, y')$ ne dépend en fait pas de y . Cette écriture suppose que $y(x)$ est définie partout sur l'intervalle (x_P, x_Q) ; en particulier, ceci interdit à x d'être une fonction autre que strictement monotone de y sur la trajectoire; il faut sinon subdiviser la trajectoire entre P et Q en morceaux sur lesquels y est définie par segments. Pour que la surface A ainsi paramétrée soit extrémale, il faut que F satisfasse l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(x \sqrt{1 + y'^2} \right) = \text{const} = a. \quad (2)$$

On obtient donc, en effectuant la dérivée par rapport à y' :

$$xy' = a \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \Rightarrow \quad y'(x)^2 (x^2 - a^2) = a^2. \quad (3)$$

Pour $a = 0$, ces équations impliquent

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y(x) = \text{const.}$$

Nous reviendrons sur ces cas de figure plus bas (dans ce premier cas de figure, en particulier, la fonction $y(x)$ et sa dérivée ne sont pas définies). Supposons donc maintenant que $a \neq 0$. Alors les équations ci-dessus n'ont de solution que pour $|x| > |a|$. On peut se restreindre au domaine $x > |a| > 0$ (on a une surface de révolution et x représente ici un rayon). Par conséquent, $y'(x)$ a le signe de a , et il vient

$$y'(x) = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (4)$$

On effectue le changement de variables $x = |a| \cosh \theta$, avec $\theta > 0$, et l'on trouve

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} y'(x) = |a| \sinh \theta \frac{a}{|a| \sqrt{\cosh^2 \theta - 1}} = a. \quad (5)$$

d'où

$$y(\theta) = a\theta + b \quad \Rightarrow \quad x(y) = |a| \cosh\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (6)$$

On détermine a et b à partir des conditions

$$x_P = x(y_P) = |a| \cosh\left(\frac{y_P - b}{a}\right), \quad x_Q = x(y_Q) = |a| \cosh\left(\frac{y_Q - b}{a}\right) \quad (7)$$

Dans le cas présent, ceci signifie

$$1 = x(0) = |a| \cosh\left(-\frac{b}{a}\right), \quad \cosh(2) = x(2) = |a| \cosh\left(\frac{2-b}{a}\right), \quad (8)$$

ce qui donne une solution possible sous la forme $a = 1$ et $b = 0$. On arrive donc à la courbe solution :

$$x(y) = \cosh(y) \quad \text{soit} \quad y(x) = \operatorname{arccosh}(x) \quad (9)$$

Comme $y'(x) = (x^2 - 1)^{-1/2}$, on obtient l'aire de la surface de révolution :

$$A = 2\pi \int_1^2 dx x \sqrt{1 + y'^2} = 2\pi \int_1^2 dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} (4 + \sinh(4)) \approx 49 \quad (10)$$

Remarque : il resterait à examiner si cette solution est unique, et si, pour toute paire (P, Q) , il existe une solution unique aux équations ci-dessus ; s'il existe plusieurs solutions, il peut s'agir d'extréma locaux ; s'il n'existe pas de solution, la solution véritable du problème (la surface de révolution d'aire minimale) est à chercher en dehors de l'ensemble des surfaces paramétrisables par une fonction $y(x)$.

Voyons maintenant que de l'autre paramétrisation découle la conservation de la fonction hamiltonienne. L'intégrale à minimiser s'écrit cette fois-ci comme

$$A = 2\pi \int_{y_P}^{y_Q} dy x \sqrt{1 + x'^2} \equiv 2\pi \int_{y_P}^{y_Q} dy A(y, x, x'), \quad (11)$$

où la fonction A ne dépend pas explicitement de y . La fonction hamiltonienne est donc conservée :

$$h = \frac{\partial A}{\partial x'} x' - A = -\frac{x}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{const} \quad (12)$$

On fait là aussi l'hypothèse que cette fonction est conservée tout le long de la trajectoire, et pas juste par morceaux le long de la trajectoire là où la paramétrisation $x(y)$ est bien définie. Pour $h = 0$, on trouve $x = 0$, le cas $y = \text{const}$ (x' indéfini) étant exclu par la paramétrisation $x(y)$. Pour $h \neq 0$, on sépare les variables et l'on trouve

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int dy = \int dx \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2}} \quad (13)$$

où $a^2 = h^2$, ce qui est exactement la même expression que l'on a trouvée avec la première paramétrisation. On arrive à la même solution :

$$x(y) = \cosh(y) \tag{14}$$

Exercice 2 : Problème de la brachistochrone

Dans cet exercice, nous cherchons la courbe dans le plan (x, y) minimisant le temps de parcours entre l'origine \mathcal{O} et le point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ dans un champ gravifique constant.

Il nous faut tout d'abord utiliser la conservation de l'énergie pour exprimer la vitesse de la particule en fonction de y . En effet, en prenant $y = 0$ pour niveau de référence du potentiel gravitationnel et en orientant y vers le bas, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \quad \Rightarrow \quad v(y) = \sqrt{2gy}. \tag{15}$$

La stratégie est maintenant de minimiser le temps de parcours entre \mathcal{O} et \mathcal{P} . Le temps nécessaire pour parcourir une longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est $dt = ds/v(y)$. La fonction à minimiser dépendra donc explicitement de y .

Le point clé ici est de bien comprendre l'analogie avec la minimisation de l'action comme vue en cours. Lorsque l'on définit l'action comme intégrale sur le temps du Lagrangien, c'est en cherchant à minimiser l'action que l'on trouve les équations d'Euler-Lagrange. Ici, on cherche à minimiser le temps de parcours, que l'on écrit comme une intégrale sur une distance (dx ou dy selon le choix) d'une quantité. Chercher à minimiser ce temps de parcours revient à trouver des équations d'Euler-Lagrange pour la quantité intégrée.

Nous devons maintenant choisir quelle paramétrisation utiliser : soit $(x(y), y)$ soit $(x, y(x))$. Nous allons voir que, dans le cadre de cet exercice, les deux choix mènent à une quantité conservée qui nous permettra de simplifier la résolution du système. En effet, nous allons voir que dans le premier cas la fonction hamiltonienne est une quantité conservée, alors que dans le second une variable cyclique apparaîtra.

Commençons par le choix $(x(y), y)$. L'élément de ligne s'écrit alors comme $ds = \sqrt{1 + x'^2} dy$ et le temps à minimiser comme

$$T = \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} dy \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dy F. \tag{16}$$

On voit qu'il s'agit de trouver la courbe réalisant le meilleur compromis entre une courte distance et une grande vitesse. Comme d'habitude, ce choix fait apparaître une variable cyclique qui nous permet de résoudre le système plus facilement :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}} = \text{const} = a \tag{17}$$

En effectuant la dérivée par rapport à x' , l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = a\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad x' = \sqrt{\frac{y}{b - y}}, \tag{18}$$

avec $b = a^{-2}$. La forme de la courbe est donc donnée par l'intégrale suivante :

$$x(y) = \int dx + c = \int dy \frac{dx}{dy} + c = \int dy \sqrt{\frac{y}{b - y}} + c. \tag{19}$$

Voyons maintenant que l'on retrouve le même résultat en utilisant la paramétrisation $(x, y(x))$. L'élément de ligne serait alors $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ et l'intégrale à minimiser :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dx G. \quad (20)$$

L'équation d'Euler-Lagrange serait alors de la forme :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) = \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (21)$$

qui n'admet pas de variable cyclique. Le point important est de noter que la fonction G ne dépend pas explicitement de x et donc que la fonction hamiltonienne est conservée :

$$h = \frac{\partial G}{\partial y'} y' - G = -\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = \text{const.} \quad (22)$$

En séparant les variables, on obtient

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}} \Rightarrow x(y) = \int dx = \int dy \sqrt{\frac{y}{b-y}} + c, \quad (23)$$

où $b = h^{-2}$. On a donc bien retrouvé la même équation qu'auparavant. Des deux paramétrisations découle une quantité conservée qui conduit à une simplification du problème. La manifestation de cette quantité conservée est propre au choix de la paramétrisation : pour l'une une variable cyclique, pour l'autre la fonction hamiltonienne. Nous pouvons maintenant résoudre la dernière intégrale afin de trouver la forme explicite du rail. En faisant le changement de variables $y = b \sin^2 \theta$, on obtient

$$x(\theta) = 2b \int d\theta \sin^2 \theta + c = \frac{b}{2} (2\theta - \sin 2\theta) + c. \quad (24)$$

Étant donné que la courbe passe par le point \mathcal{O} , la constante c est nulle. En posant $\varphi = 2\theta$ et $R = b/2$, on a la forme paramétrique suivante de la courbe recherchée :

$$\begin{cases} x(\varphi) = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y(\varphi) = R(1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad (25)$$

qui est l'équation paramétrique d'une cycloïde de rayon R . Noter qu'en calculant $dt = ds/v$ en utilisant

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^{-1},$$

on a

$$dt = \sqrt{\frac{1 + x'^2}{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2gR}} \sqrt{\frac{2 - 2\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} R \sin \varphi d\varphi = \sqrt{\frac{R}{g}} d\varphi. \quad (26)$$

et donc

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \varphi_0 \quad (27)$$

où φ_0 est l'angle final, c'est-à-dire l'angle pour lequel $x(\varphi_0) = x_0$ et $y(\varphi_0) = y_0$. Il n'y a pas d'expression simple permettant d'exprimer R et φ_0 en fonction de x_0 et y_0 , nous laissons donc R et φ_0 sous forme implicite.

On peut maintenant remarquer une chose a priori surprenante : il existe des situations pour lesquelles la forme idéale du rail passe au-dessous de \mathcal{P} avant de remonter. En effet, ce genre de trajectoire est caractérisé par

$$0 < \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}. \quad (28)$$

Il faut donc que $\varphi_0 > \pi$ pour que cela puisse se produire. Cette condition peut être traduite sur la pente entre \mathcal{O} et \mathcal{P} . En effet on a

$$\varphi_0 > \pi \iff \frac{y_0}{x_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0} < \frac{2}{\pi}. \quad (29)$$

car la fonction $g(\varphi_0) = \frac{1 - \cos \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0}$ est décroissante sur $[0, 2\pi]$.

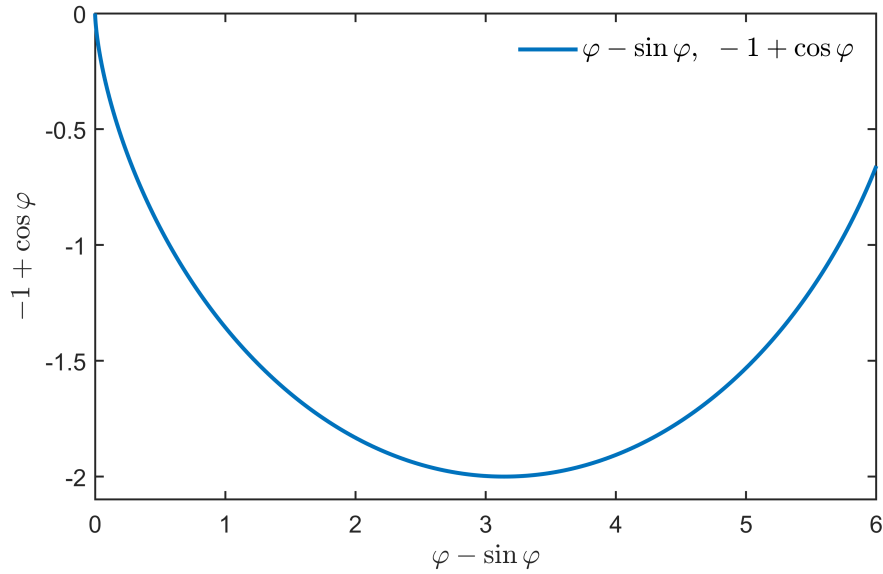


FIGURE 1 – Exemple de rail admettant un minimum en $\varphi_0 = 3\pi/2$. Attention, ici l’axe vertical a le signe opposé par rapport au texte.

Exercice 3 : Bille glissant sur un fil rigide dans un plan vertical

1. **Coordonnée généralisée.** Le mouvement étant contraint à la courbe $y = y(x)$, la coordonnée x suffit comme unique coordonnée généralisée. La contrainte permet alors d’écrire $y(t) = y(x(t))$ et $\dot{y} = y'(x) \dot{x}$.

2. **Lagrangien.** Dans ce système de coordonnées, l’énergie cinétique s’écrit :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(1 + y'(x)^2)\dot{x}^2 \quad (30)$$

tandis que l’énergie potentielle de pesanteur, l’axe y étant orienté vers le bas, vaut :

$$V = -mgy(x), \quad (31)$$

Ainsi,

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(1 + y'(x)^2)\dot{x}^2 + mgy(x). \quad (32)$$

3. **Équation d'Euler–Lagrange.** On calcule les dérivées du Lagrangien $L(x, \dot{x})$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m y'(x) y''(x) \dot{x}^2 + m g y'(x) \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + y'(x)^2) \dot{x} \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + y'(x)^2) \ddot{x} + 2m y'(x) y''(x) \dot{x}^2 \quad (35)$$

L'équation d'Euler–Lagrange $\frac{d}{dt}(\partial L/\partial \dot{x}) - \partial L/\partial x = 0$ se réduit à

$$0 = m(1 + y'(x)^2) \ddot{x} + m y'(x) y''(x) \dot{x}^2 - m g y'(x) \quad (36)$$

ce qui implique l'équation du mouvement sur $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{y'(x) y''(x)}{1 + y'(x)^2} \dot{x}^2 = \frac{g y'(x)}{1 + y'(x)^2}. \quad (37)$$

Intégrale d'énergie. Comme L ne dépend pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne

$$h = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m}{2} (1 + y'(x)^2) \dot{x}^2 - m g y(x) \quad (38)$$

est conservée. Elle correspond à l'énergie mécanique $h = E = T + V$. Pour un lâcher sans vitesse initiale en $(0, y_0)$, on a $E = -m g y_0$, ce qui donne l'intégrale première

$$\dot{x}^2 = \frac{2g [y(x) - y_0]}{1 + y'(x)^2}. \quad (39)$$

4. **Cas particulier : fil rectiligne** Dans le cas d'un fil rectiligne de courbure $y(x) = b - ax$ avec $a > 0$, la dérivée de $y(x)$ est constante, si bien que l'équation du mouvement (37) donne une accélération constante :

$$\ddot{x} = -\frac{g a}{1 + a^2}. \quad (40)$$

Ainsi, pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient le mouvement

$$x(t) = -\frac{g a}{2(1 + a^2)} t^2, \quad y(t) = b + \frac{g a^2}{2(1 + a^2)} t^2. \quad (41)$$

La constante d'accélération effective sur x , $\ddot{x} = -\frac{g a}{1 + a^2}$, vérifie

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial a} = -g \frac{1 - a^2}{(1 + a^2)^2}. \quad (42)$$

Elle est donc maximale pour $a = 1$ à $\ddot{x}_m = g/2$. Pour $a < 1$, l'horizontalité du fil ralentit le mouvement de la bille, tandis que pour $a > 1$, la verticalité du fil fait que la bille avance moins sur l'axe x .

5. **Cas particulier : cycloïde** En supposant le sommet en $(0, 0)$ et une vitesse initiale au sommet nulle, la courbe de la cycloïde est définie par

$$x(\varphi) = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y(\varphi) = R(1 - \cos \varphi), \quad (43)$$

où $R > 0$ et où la nouvelle coordonnée généralisée $\varphi(t)$ vérifie $\varphi(0) = 0$. On écrit les dérivées de $x(t)$ et $y(x)$ en fonction de cette nouvelle variable :

$$y'(\varphi) = y'(x(\varphi))x'(\varphi), \quad (44)$$

$$\dot{x} = x'(\varphi)\dot{\varphi}. \quad (45)$$

Avec les équations de la cycloïde (43), on en déduit :

$$y'(x(\varphi)) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}, \quad (46)$$

$$\dot{x} = R(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}. \quad (47)$$

L'intégrale première (39) donne alors :

$$R^2(1 - \cos \varphi)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2gR(1 - \cos \varphi)}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}\right)^2} = \frac{2gR(1 - \cos \varphi)^3}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = gR(1 - \cos \varphi)^2 \quad (48)$$

En utilisant simplifiant, on obtient

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \sqrt{\frac{g}{R}} t} \quad (\varphi(0) = 0). \quad (49)$$

Ainsi, le mouvement le long de la brachistochrone est uniforme dans l'angle cycloïdal, et la trajectoire cartésienne est

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= R\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t - \sin\sqrt{\frac{g}{R}} t\right), \\ y(t) &= R\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{R}} t\right). \end{aligned}} \quad (50)$$

Remarques.

- L'équation générale (37) s'applique à toute forme lisse de fil $y(x)$.
- Pour la cycloïde, si la bille n'est pas lâchée avec une vitesse initiale nulle, la dynamique en φ est donnée par

$$4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}^2 = 2gR(1 - \cos \varphi) + \text{constante},$$

et $\varphi(t)$ s'obtient par quadrature ; la loi uniforme en temps (49) n'est valable que si la bille est initialement au repos et au sommet en $x = 0$.

6. **Force de contrainte en coordonnées cartésiennes.** On prend comme coordonnées généralisées x, y . Pour éviter confusion dans la notation, on renomme la fonction décrivant le fil : $y(x) \rightarrow f(x)$. On impose la contrainte holonome

$$\phi(x, y) = y - f(x) = 0, \quad \nabla \phi = (-f'(x), 1).$$

Avec $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ et $V = -mgy$, le lagrangien est

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy.$$

Les équations d'Euler–Lagrange en les coordonnées x, y s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \equiv R_i, \quad (q_i = x \text{ ou } y),$$

où $\lambda(t)$ est le multiplicateur de Lagrange et $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$ la force de contrainte. Comme

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

on obtient

$$\boxed{m\ddot{x} = R_x} \tag{51}$$

$$\boxed{m\ddot{y} + mg = R_y} \tag{52}$$

auxquelles il faut ajouter la contrainte

$$\boxed{\phi(x, y) = y - f(x) = 0} \tag{53}$$

et ses dérivées cinématiques $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$, $\ddot{y} = f''(x)\dot{x}^2 + f'(x)\ddot{x}$, qui nous permettent dans le cas général d'exprimer les composantes de la force de contrainte en fonction de $x(t)$ et $f(x)$.

Exemple : fil rectiligne. Dans le cas du fil rectiligne $y = b - ax$ on a pour les dérivées cinématiques $\dot{y} = -a\dot{x}$ et $\ddot{y} = -a\ddot{x}$. En utilisant la solution obtenue ci-dessus, $\ddot{x} = ga/(1 + a^2)$, on obtient

$$R_x = mg \frac{a}{1 + a^2}$$

$$R_y = -mg \frac{a^2}{1 + a^2} - mg = mg \frac{1}{1 + a^2}.$$

On voit bien que cette force est orientée dans la direction $(a, 1)$, qui est exactement parallèle au gradient de la fonction de contrainte : $\nabla\phi = (-f'(x), 1) = (a, 1)$.